数理解析研究所講究録 1445 巻 2005 年 154-166

転移点における WKB 解の構成について

慶応大学・理工学部　中野　實 (Minoru Nakano)
Faculty of Science and Technology, Keio University

要　旨. **転移点** (turning point) を持つ**線形 2 階常微分方程式の解の漸近性**について考察する. 解の '漸近的**特性**' は文字通り '**特性**多角形' によって特徴づけられる. 特性多角形は Newton 多角形と似たもので, 線分が下に凸に連結したものである. 一本の線分の場合が最も簡単であるが, これがエアリー (Airy) 方程式である. 2 番目に簡単なものは 2 本の線分の場合で Fedoryuk [6], Nakano et al. [23] で考察された. 3 本以上の場合は Fedoryuk [6], Nakano [15], [16], [20]~[22], Roos [28], [29] で扱われている. ここでは最も一般の場合, 即ち, 任意有限本の線分の場合を考察する.

§1. はじめに.

1.1. 次の 1 次元 Schrödinger タイプの方程式を考察する :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \varepsilon^{2h}\,\dfrac{d^2y}{dx^2} = Q(x,\varepsilon)\,y, \quad Q(x,\varepsilon) := \displaystyle\sum_{k=0}^{s}\sum_{l=0}^{l_k-1} a_{j_k+l}\,\varepsilon^{j_k+l}\,x^{m_{j_k}-l\cdot\alpha_{j_k}^{-1}}; \\ h,\ s\in\mathbb{N};\ x,y,a_{j_k+l}\in\mathbb{C},\ \forall a_{j_k}\neq 0,\ a_{j_s+l}=0\ (l\geq 1); \\ 0<\varepsilon<1;\ D:=\{x:\ 0\leq |x|\leq x_0\}. \end{cases}$$

ここで x_0 は小さい正定数, ε は 小さい正のパラメーターで Planck 定数とみなされることがある. また, 次の条件を仮定する:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \alpha_{j_k}^{-1} := \dfrac{m_{j_k}-m_{j_{k+1}}}{j_{k+1}-j_k} > 0,\ \ \alpha_{j_s}^{-1} := \dfrac{m_{j_s}+2}{h}, \\ \alpha_{j_k}^{-1} > \alpha_{j_{k+1}}^{-1} > 0\ \ (k=0,1,2,\cdots,s-1), \end{cases}$$

$$(1.3)\qquad \begin{cases} l_k := j_{k+1}-j_k\ (>0)\ \ (k=0,1,2,\cdots,s-1), \\ j_0 := 0,\ \ j_s := h,\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} l_k = h\ \ (l_k\in\mathbb{N}), \end{cases}$$

$$(1.4)\qquad h > \frac{j_k+\alpha_{j_k}(m_{j_k}+2)}{2}\quad (k=0,1,2,\cdots,s-1).$$

$Q(x,0)$ $(= a_{j_0}\,x^{m_{j_0}} \equiv a_0\,x^{m_0})$ の零点は (1.1) の**転移点**(turning point) と呼ばれる. したがって, (1.1) は原点 $x=0$ に転移点を持ち その位数は $m_{j_0}(\equiv m_0)$ である. 不等式 (1.4) は **特異摂動条件** (singular perturbation condition), 即ち, §2 で行われる変換によって単純化された方程式がすべて特異摂動タイプ ($\varepsilon=0$ と置くと微分方程式でなくなる) になるための条件である.

我々の目的は '特性多角形の概念' と いわゆる 'stretching-matching method' (Nakano [15], [16], [18], [20] ~ [22], Nakano et at. [23], Nishimoto [25], Wasow [33]) と呼ばれる方法を適用して領域 D における解の漸近性質を調べることである. (結果は, WKB 近似解が D の部分領域である **特性領域** (canonical domain) と呼ばれる領域と それに隣接した領域において 漸近展開になっていると言うことである.)

1.2. 新たに 実 2 次元の (X,Y)-平面を用意して 次の点をその上に打つ.

$$(1.5)\qquad \begin{cases} P_k^{(l)} := \left(\dfrac{j_k+l}{2},\dfrac{m_{j_k}-l\cdot\alpha_{j_k}^{-1}}{2}\right)\ (k=0,1,2,\cdots,s;\ \ l=0,1,2,\cdots,l_k-1), \\ R := (h,-1). \end{cases}$$

点 $P_k^{(l)}$ は (1.1) の係数 $Q(x,\varepsilon)$ の各項の ε と x のべき指数から定められるもので, 点 R は (1.1) の左辺の ε のべき指数から定められる. したがって, 点 $P_k^{(l)}$ と係数の項 $a_{j_k+l}\,\varepsilon^{j_k+l}\,x^{m_{j_k}-l\cdot\alpha_{j_k}^{-1}}$ とは1対1に対応する. 点

$$P_{k-1}^{(0)}, P_{k-1}^{(1)}, P_{k-1}^{(2)}, \cdots, P_{k-1}^{(l_{k-1}-1)}, P_k^{(0)}$$

は1つの線分上にあるが, この線分を L_k $(k=1,2,\cdots,s)$ とする. また, 点 $P_s^{(0)}$ と点 R を結ぶ線分を L_{s+1} とする. 関係式 (1.2) はこれらの線分の傾きの関係を表している. **特性多角形** (characteristic polygon) はこれらの線分を順に繋げたものと定義される (Iwano-Sibuya [12]). この多角形は3角形や4角形のように閉じていない. 特性多角形は (1.2) と (1.4) によって 下に凸である. そして, それは 点 $P_k^{(0)}$ で折れているから 全部で $s+1$ 本の線分から成っている. また, 各線分上の点の個数は条件 (1.2), (1.3), (1.4) さえ満たす限り任意の有限個である.

2本, 3本, もっと多くの線分から成る特性多角形を持つ微分方程式が Fedoryuk [6], Nakano [15], [21], [22], Nakano et al. [23], Roos [28], [29] などで考察されているが, それらはすべて (1.1) の特別な場合である.

例. 1本 $\cdots$ $\varepsilon^2 y'' = x^m y\ (m \geq 1)$, $\varepsilon^4 y'' = (x^2+\varepsilon x+\varepsilon^2)y$,
2本 $\cdots$ $\varepsilon^2 y'' = (x^m+\varepsilon x)y\ (m\geq 5)$, $\varepsilon^6 y'' = (x^2+\varepsilon x+\varepsilon^2)y$, $\varepsilon^6 y'' = (x^6+\varepsilon x^4+\varepsilon^2 x^2+\varepsilon^3)y$,
3本 $\cdots$ $\varepsilon^4 y'' = (x^5+\varepsilon x^2+\varepsilon^2)y$,
6本 $\cdots$ $\varepsilon^{10} y'' = (x^{22}+\varepsilon x^{15}+\varepsilon^2 x^{10}+\varepsilon^3 x^6+\varepsilon^4 x^3+\varepsilon^5 x)y$.

Nakano [18], [20] はこれと同じ方法で n 階微分方程式を扱っている. また, この方法と全く違う観点で3階微分方程式が考察されている (Aoki et al. [1], Berk et al. [2], Matsubara et al. [14], Nakano [17], [19], Nakano et al. [24]).

注 意. $Q(x,\varepsilon)$ の ε^{j_k+l} の 項にある x^m のベキ指数 m が最低次数より大きいもの x^m $(m > m_{j_k} - l\cdot\alpha_{j_k}^{-1})$ に対応する点は (X,Y)-平面で特性多角形より上方にあるが, これらが解の漸近性に及ぼす影響は小さいことが知られている (Iwano-Sibuya[12]). したがって, 特性多角形の線分上にのっている点に対応する項のみの方程式, 即ち, (1.1) を解析することが出発点である. この意味で **(1.1) は最も一般の方程式**である.

1.3. 内容は以下の通り. §2 では, 元の領域 D の適当な部分領域において (1.1) を漸近的により単純な微分方程式に帰着させる. §3 では, 単純化された微分方程式の WKB 近似解を求める. WKB 近似解は漸近展開の第1次近似である. §4 では, (1.1) が抽象的であるから, これよりやや簡単な形, かつ, かなり一般的な形をした微分方程式で, しかも, (1.1) の本質を持ったものについて, 漸近解の存在領域である 特性領域 の定め方と隣り合った領域における2つの解を接続する行列 (matching matrix) の計算法について解説する. 最後の §5 では, (1.1) の matching matrix を計算する. こうすることで, 元の領域 D (より正確には, D の一部分である角領域またはそれに近い形をしたもの) における解の漸近性を知ることができたことになる.

§2. (1.1) の漸近的単純化.

2.1. $Q(x,\varepsilon)$ の各項は D の適当な部分領域において '漸近的に優勢' (asymptotically dominant) である. これを知るため, たとえば, 折点 $P_{\hat{k}}^{(0)}$ に対応する項 $a_{j_{\hat{k}}}\,\varepsilon^{j_{\hat{k}}}\,x^{m_{j_{\hat{k}}}}$ が優勢であることを示そう. そのために, この項を一番前にもって来て $Q(x,\varepsilon)$ を次のように3つの部分に分ける:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} Q(x,\varepsilon) \\ = a_{j_{\hat{k}}}\,\varepsilon^{j_{\hat{k}}}\,x^{m_{j_{\hat{k}}}} \left\{ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\hat{k}-1}\sum_{l=0}^{l_k-1} + \sum_{l=0}^{l_{\hat{k}}-1} + \sum_{k=\hat{k}+1}^{s}\sum_{l=0}^{l_k-1} \right) \dfrac{a_{j_k+l}}{a_{j_{\hat{k}}}}\,\varepsilon^{j_k-j_{\hat{k}}+l}\,x^{m_{j_k}-m_{j_{\hat{k}}}-l\cdot\alpha_{j_k}^{-1}} \right\}. \end{cases}$$

最初のダブル Σ の項

$$(2.2)\qquad \sum_{k=0}^{\hat{k}-1}\sum_{l=0}^{l_k-1} \frac{a_{j_k+l}}{a_{j_{\hat{k}}}} \left(\varepsilon^{-1}\,x^{\alpha_{j_k}^{-1}}\right)^{l_k-l} \prod_{n=0}^{\hat{k}-1-k} \left(\varepsilon^{-1}\,x^{\alpha_{j_{k+n}}^{-1}}\right)^{l_{k+n}}$$

は, $\varepsilon^{-1} x^{\alpha_{j_{\hat{k}-1}}^{-1}} \to 0$ の時 '$\to 0$' である. 即ち, $x \in \{x:\ |x| \le \check{k}\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}-1}}}\}$ ($\check{k}$ は十分小さい定数) に属する x に対して $\varepsilon \to 0$ の時ダブル Σ の項は小さい. なぜならば, x が最も小さい領域 $\{x:\ |x| \le \check{k}\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}-1}}}\}$ に属する時 $\varepsilon \to 0$ ならば $\varepsilon^{-1} x^{\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}} \to 0$ だからである.

$\varepsilon\, x^{-\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}} \to 0$ の時, 第 2 項の Σ:

$$\sum_{l=0}^{l_{\hat{k}}-1} \frac{a_{j_{\hat{k}}+l}}{a_{j_{\hat{k}}}} \left(\varepsilon\, x^{-\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}}\right)^l \tag{2.3}$$

は 1 に近づく. 即ち, $\{x:\ |x| \ge \check{K}\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}}}\}$ ($\check{K}$ は十分大きい定数) に属する x に対して $\varepsilon \to 0$ の時 (2.3) は 1 に近づく.

最後の項

$$\sum_{k=\hat{k}+1}^{s} \sum_{l=0}^{l_k-1} \frac{a_{j_k+l}}{a_{j_k}} \left(\varepsilon\, x^{-\alpha_{j_k}^{-1}}\right)^l \prod_{n=0}^{k-\hat{k}-1} \left(\varepsilon\, x^{-\alpha_{j_{\hat{k}+n}}^{-1}}\right)^{l_{\hat{k}+n}} \tag{2.4}$$

は $\varepsilon x^{-\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}} \to 0$ の時 0 に近づく. 即ち, $\{x:\ |x| \ge \check{K}\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}}}\}$ ($\check{K}$ は十分大きい定数) に属する x に対して $\varepsilon \to 0$ の時 (2.4) は小さくなる. なぜならば, 最も大きい領域 $\{x:\ |x| \ge \check{K}\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}}}\}$ に属する x に対して $\varepsilon \to 0$ の時 $\varepsilon x^{-\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}} \to 0$ となるからである.

このようにして, $a_{j_{\hat{k}}}\,\varepsilon^{j_{\hat{k}}}\,x^{m_{j_{\hat{k}}}}$ が 下で与えられる (D の部分領域) $D_{out,j_{\hat{k}}}$ に属する x に対して $\varepsilon \to 0$ の時, 他の項と比べて漸近的に大きいのである. よって, この項のみの微分方程式

$$\varepsilon^{2h-j_{\hat{k}}} \frac{d^2y}{dx^2} = a_{j_{\hat{k}}}\, x^{m_{j_{\hat{k}}}}\, y \tag{2.5}$$

の解は 領域

$$D_{out,j_{\hat{k}}} := \left\{(x,\varepsilon):\ \check{K}\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}}} \le |x| \le \check{k}\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}-1}}}\right\}. \tag{2.5$'$}$$

において, (1.1) の**第 1 次近似漸近解**になる. 原点 (転移点) を含み (2.5)$'$ の形にならない例外的な領域 $\left\{(x,\varepsilon):\ 0 \le |x| \le \check{k}\,\varepsilon^{\alpha_h}\right\}$ では

$$\varepsilon^h \frac{d^2y}{dx^2} = a_h\, x^{m_h}\, y$$

の解が必要であるが, これは特殊関数で与えられる. $m_h = 0$ ならば定数係数微分方程式である.

2.2. 番号が続く 2 つの領域 $D_{out,j_{\hat{k}}}$ と $D_{out,j_{\hat{k}+1}}$ の間にある中間領域 $D_{j_{\hat{k}+1}}$ において, (1.1) は次のように 漸近的に単純化される. いわゆる **拡大変換** (stretching transformation)

$$x := t\,\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}}} \tag{2.6}$$

を (1.1) に適用すると, 次の微分方程式

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_{j_{\hat{k}+1}}^2 \frac{d^2y}{dt^2} = Q_{j_{\hat{k}+1}}(t)\, y \quad \left(\varepsilon_{j_{\hat{k}+1}}^2 := \varepsilon^{2h-\{j_{\hat{k}}+\alpha_{j_{\hat{k}}}(m_{j_{\hat{k}}}+2)\}}\right) \\ &Q_{j_{\hat{k}+1}}(t) := \sum_{l=0}^{l_{\hat{k}}} a_{j_{\hat{k}}+l}\, t^{m_{j_{\hat{k}}}-l\cdot\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}} \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

が 中間領域

$$D_{j_{\hat{k}+1}} := \left\{t:\ \check{k} \le |t| \le \check{K}\right\}. \tag{2.8}$$

で得られることが分かる. $Q_{j_{\hat{k}+1}}(t)$ は, 2 つの折点 $P_{\hat{k}}^{(0)}$, $P_{\hat{k}+1}^{(0)}$ とそれらの間のすべての点, 即ち, 特性多角形の 1 つの線分 $L_{\hat{k}+1}$ の上にある端点を含むすべての点, に対応する項を含む.

この微分方程式の係数 $Q_{j_{\hat{k}+1}}(t)$ は多項式であるから, (2.7) は $Q_{j_{\hat{k}+1}}(t)$ の零点で転移点を持つ. これらの転移点は'元の転移点'と区別して (1.1) の **準転移点** (secondary turning point) と呼ばれる (Wasow [33]). したがって, secondary turning point を持つ微分方程式の解析問題は secondary turning point problem と呼ばれる. 最初の secondary turning problem を扱ったのは Nakano et al. [23] である. なお, 変換 (2.6) を施すことは 'stretching-matching method' の第1段階である.

では, (2.7) を導いてみよう. 変換 (2.6) を (1.1) に施すと (1.1) は

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \varepsilon^{2h-2\alpha_{j_{\hat{k}}}}\dfrac{d^2y}{dt^2} = \tilde{Q}\,y \\ \tilde{Q} = \varepsilon^{j_{\hat{k}}+\alpha_{j_{\hat{k}}}m_{\hat{k}}}\displaystyle\sum_{k=0}^{s}\sum_{l=0}^{l_k-1} a_{j_k+l}\,\varepsilon^{j_k+l+\alpha_{j_{\hat{k}}}(m_{j_k}-l\cdot\alpha_{j_k}^{-1})-j_{\hat{k}}-\alpha_{j_{\hat{k}}}m_{j_{\hat{k}}}} \\ \quad = \varepsilon^{j_{\hat{k}}+\alpha_{j_{\hat{k}}}m_{\hat{k}}}\left(\sum_1+\sum_2+\sum_3\right) \end{cases}$$

となる. ただし, $\sum_1$ は線分 $L_1, L_2, \cdots, L_{\hat{k}}$ 上にある点

$$P_0^{(0)}, P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \cdots, P_0^{(l_0-1)}, P_1^{(0)}, P_1^{(1)}, \cdots, P_{\hat{k}-1}^{(l_{\hat{k}-1}-1)}$$

に対応する項をすべて含み, 第2の $\sum_2$ は線分 $L_{\hat{k}+1}$ 上の点

$$P_{\hat{k}}^{(0)}, P_{\hat{k}}^{(1)}, P_{\hat{k}}^{(2)}, \cdots, P_{\hat{k}}^{(l_{\hat{k}}-1)}, P_{\hat{k}+1}^{(0)}$$

に対応する項をすべて含む. また, 最後の $\sum_3$ は その他の線分 $L_{\hat{k}+2}, \cdots, L_s$ 上にある点

$$P_{\hat{k}+1}^{(1)}, P_{\hat{k}+1}^{(2)}, \cdots, P_s^{(0)}$$

に対応するすべての項を含む. この時, 最初の Σ について, 次が成り立つことが分かる:

$$(2.10)\qquad \sum_1 = \sum_{k=0}^{\hat{k}-1}\sum_{l=0}^{l_k-1} a_{j_k+l}\,\varepsilon^g\, t^{m_{j_k}-l\cdot\alpha_{j_k}^{-1}} \to 0 \;\left(\varepsilon\to 0,\; t\in D_{j_{\hat{k}+1}}\right).$$

なぜならば, ε のべき指数

$$g := \sum_{n=k+1}^{\hat{k}-1} l_n\cdot\alpha_{j_n}^{-1}(\alpha_{j_{\hat{k}}}-\alpha_{j_n}) + (l_k-l)\cdot\alpha_{j_k}^{-1}(\alpha_{j_{\hat{k}}}-\alpha_{j_k})$$

はプラスであるから, である.

第2の Σ は, そのべき指数がゼロであることから, t の多項式となり, それは

$$(2.11)\qquad \sum_2 = \sum_{l=0}^{l_{\hat{k}}} a_{j_{\hat{k}}+l}\, t^{m_{j_{\hat{k}}}-l\cdot\alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1}}$$

である.

3番目の Σ における ε のべき指数

$$g' := \sum_{n=1}^{k-\hat{k}-1} l_{\hat{k}+n}\cdot\alpha_{j_{\hat{k}}+n}^{-1}(\alpha_{j_{\hat{k}}+n}-\alpha_{j_{\hat{k}}}) + l\cdot\alpha_{j_k}^{-1}(\alpha_{j_k}-\alpha_{j_{\hat{k}}})$$

はプラスであるから

$$(2.12)\qquad \sum_3 \to 0 \;\left(\varepsilon\to 0,\; t\in D_{j_{\hat{k}+1}}\right)$$

が成り立つ. このようにして, 方程式 (2.7) が得られた.

微分方程式 (2.5) は (1.1) の **外部方程式** (outer equation), 微分方程式 (2.7) は (1.1) の **内部方程式** (inner equation) と呼ばれる. また, それらの解はそれぞれ **外部解** (outer solution), **内部解** (inner solution) と呼ばれる.

2.3. 以上の結果をまとめて 次の定理を得る:

定 理 2.1. 微分方程式 (1.1) は外部領域 (2.5)′ において, 外部方程式 (2.5) に漸近的に表される. この微分方程式の係数は 特性多角形の線分 $L_{\hat{k}+1}$ 上の左端点 $P_{\hat{k}}^{(0)}$ に対応する. また, 微分方程式 (1.1) は内部領域 (2.8) において 内部方程式 (2.7) に漸近的に表される. この方程式の係数の項は 特性多角形の線分 $L_{\hat{k}+1}$ 上の端点を含めすべての点 $P_{\hat{k}}^{(0)}, P_{\hat{k}}^{(1)}, P_{\hat{k}}^{(2)}, \cdots, P_{\hat{k}}^{(l_{\hat{k}}-1)}, P_{\hat{k}+1}^{(0)}$ に対応する.

注 意. 外部方程式と内部方程式はもともと同一の方程式, 即ち, (1.1) から導かれたものであるから, それらの解, 即ち, 外部解と内部解には線形関係があるはずである. この線形関係は行列で表され matching matrix と呼ばれる. ところで, この行列を求めるためには, 有界である内部領域 (2.8) を拡大した領域

$$D_{in} := \{t : \ 0 < |t| < \infty\} \tag{2.8'}$$

で内部解を求めなければならない. (2.8)′ を **拡大内部領域** と呼ぼう. こうすると, 拡大内部領域と外部領域とは共通点を持つから都合がいいのである. しかし, 拡大内部領域で解を求めると言うことは, 解の大域的性質を調べることであるから, 新たな困難な問題が生じることになる. matching matrix を計算することは stretching-matching method の第 2 段階である (§4.4, 4.5, §5).

§3. WKB 近似解.

3.1. 外部方程式と内部方程式は 見掛け上 共通の形をしている. それは 特異摂動タイプである. そこで, ここでは, 次の微分方程式を考察することにする.

$$\varepsilon^{2h}\frac{d^2y}{dx^2} = Q(x)\,y \quad (h \in \mathbb{N};\ x, y \in \mathbb{C};\ 0 \le |x| < \infty;\ \ 0 < \varepsilon < 1). \tag{3.1}$$

$Q(x)$ は x の多項式である. したがって, $x = \infty$ は (3.1) の **不確定特異点** である. $Q(x)$ の零点は (3.1) の転移点である. 一般に, $Q(x)$ の次数が高い時程 多くの 転移点が存在する.

(3.1) の **WKB 近似解** $\tilde{y}^{\pm}(x, \varepsilon)$ を

$$\tilde{y}^{\pm}(x,\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{Q(x)}}\exp\Big(\pm\frac{1}{\varepsilon^h}\xi(a,x)\Big) \tag{3.2}$$

と定義する. ただし,

$$\xi(a,x) := \int_a^x \sqrt{Q(x)}\,dx \tag{3.3}$$

である (ここの a は転移点とは限らない).

複素 x-平面上で 方程式

$$\Re\,\xi(a,x) = C \quad (Q(a) = 0) \tag{3.4}$$

によって定められる点の集合は曲線であるが, これは (3.1) の高さ C の **等高線** と呼ばれる. 特に, 高さ零の等高線, 即ち, $C = 0$ の場合は (3.1) の **Stokes 曲線** と呼ばれる. また, 方程式

$$\Im\,\xi(a,x) = C \quad (Q(a) = 0) \tag{3.5}$$

によって定められる曲線も (3.1) の高さ C の **等高線** と呼ばれ, 特に, $C = 0$ の場合は (3.1) の **anti-Stokes 曲線** と呼ばれる.

注 意. $x = \infty$ は不確定特異点で, この近傍における Stokes 曲線と anti-Stokes 曲線は, 方程式 $\Re\xi(\infty, x) = 0$, $\Re\xi(\infty, x) = 0$ から定められる. これらは (3.4), (3.5) から定まる曲線の $x \to \infty$ の状態と一致する.

a, b が共に転移点である時, a から出る Stokes 曲線 $\Re\xi(a,x) = 0$ は, $x = b$ から見れば 等高線 $\Re\xi(b,x) =$const$\neq 0$ である. ただし, $\Re\xi(a,x) = \Re\xi(b,x)$ の場合は b から出る Stokes 曲線でもある (下の**例** (i) を参照).

3.2. Stokes 曲線の主な性質は次の通りである:

(i) Stokes 曲線と anti-Stokes 曲線は 共に転移点から出て, 他の転移点 または 不確定特異点である $x = \infty$ に向かう.

(ii) Stokes 曲線は自分自身とは交わらない. anti-Stokes 曲線も同様である.

(*iii*) Stokes 曲線は円と homotopic でない. 幾本かの Stokes 曲線を結んでも円と homotopic にならない. anti-Stokes 曲線についても同様である.

例. (*i*) $Q(x) = x^2 - 1$ の時, $x = \pm 1$ は転移点で, x-平面の実軸上の線分 $-1 \le \Re x \le 1$ は Stokes 曲線である. $x = \pm 1$ から出る他の Stokes 曲線は共にそれぞれ $x = \infty$ に向かう.

(*ii*) $\Im\xi(a,x)$ の値は Stokes 曲線に沿って単調に増加 (または減少) するから, Stokes 曲線はループを作らない.

(*iii*) $Q(x) = x^{-2} - x$ の時, $x = 1, e^{\pm 2\pi i/3}$ が転移点, $x = 0$ は確定特異点, $x = \infty$ は不確定特異点である. $x = 0$ の近傍で $Q(x) \sim x^{-2}$ だから, $\xi \sim \log x$. よって, 等高線 $\Re \log x = \{(\Re x)^2 + (\Im x)^2\}^{1/2} = \text{const}\ (>0)$ は $x = 0$ の周りの円である. 任意の 2 つの転移点を結ぶ Stokes 曲線があり, これらの 3 本をつなげると円と homotopic になる.

$Q(x) = x - x^{-2}$ の時, やはり $x = 1, e^{\pm 2\pi i/3}$ が転移点, $x = 0$ は確定特異点, $x = \infty$ は不確定特異点である. $x = 0$ の近傍で $Q(x) \sim -x^{-2}$ だから, 等高線 $\Im \log x = \{(\Re x)^2 + (\Im x)^2\}^{1/2} = \text{const}\ (>0)$ は $x = 0$ の周りの円である. このように, 有理関数の場合 Stokes 曲線 (の幾本かをつなげたもの) と anti-Stokes 曲線 (の幾本かをつなげたもの) が 円と homotopic になることがある.

(3.3) の右辺の積分で定義される関数 $\xi := \xi(a,x)$ $(Q(a) = 0)$ は, $d\xi/dx \ne 0$ $(x \ne a)$ より 転移点を除いて,『複素 x-平面 から複素 ξ-平面への等角写像』である. したがって, (3.4) で定義される等高線と (3.5) で定義される等高線は, 写像 $\xi = \xi(a,x)$ によって ξ-平面に 直交するように写される.

x-平面上において, Stokes 曲線で囲まれた 非有界単連結集合 $\mathcal{D}^{can}$ が, ξ-平面全体に 有限本の線分を除いて 写される時, それは (3.1) の**特性領域**(canonical domain) と呼ばれる. (3.1) の特性領域は少なくとも 1 つあり, 一般には 複数個あることが知られている. しかし, 抽象的な多項式 $Q(x)$ に対しては, 転移点も, したがって, Stokes 曲線も定めることができないので, 特性領域を決定できない. 具体的な多項式 $Q(x)$ に対する (3.1) の特性領域の幾つかの例が Fedoryuk [6], Nakano [22], Wasow [33] 等で求められている. 2 つの WKB 近似解 (3.2) を漸近展開とする 2 つの線形独立な真の解が存在する最大領域が 特性領域である. これに関する詳しい説明は Fedoryuk [6], [7], Wasow [33] 等で見られる.

上の**例** (*iii*) に示されたように, $Q(x)$ が有理関数の場合, その Stokes 曲線と anti-Stokes 曲線の形は 多項式の場合とは全く違う. 幾つかの具体例が Fedoryuk [6] に, Nakano [16], [18] においては 特性領域も 与えられている. (以上のほかに, 特性領域について §4.2 にも簡単な説明がある.)

例. Airy 方程式 $\varepsilon^2 y'' = xy$ の場合, Stokes 曲線は $x = re^{\pm\pi i/3}$, $re^{\pi i}$ $(r \ge 0)$ の 3 本. これらの 2 本ではさまれた角 $4\pi/3$ の角領域の 3 つが特性領域である. 複素平面 2 枚から成る Riemann 面で考えれば, 6 つある.

WKB 近似解 $\tilde{y}^{\pm}(x,\varepsilon)$ は 次に述べるような **2 重漸近性**(double asymptotic property) を持つことが知られている (Evgrafov et al. [4], Fedoryuk [6]):

定 理 3.1. $\tilde{y}^{\pm}(x,\varepsilon)$, $\mathcal{D}^{can}$ をそれぞれ (3.1) の WKB 近似解, 特性領域 とする. この時, WKB 近似解 $\tilde{y}^{\pm}(x,\varepsilon)$ を漸近展開とする (3.1) の真の解 $y^{\pm}(x,\varepsilon)$ が存在して, 次の 2 重漸近性が成り立つ:

$$y^{\pm}(x,\varepsilon) \sim \tilde{y}^{\pm}(x,\varepsilon) \quad \begin{cases} x \to \infty & (x \in \mathcal{D}^{can},\ 0 < \varepsilon < 1) \\ \varepsilon \to 0 & (x \in \mathcal{D}^{can},\ 0 < \varepsilon < 1) \end{cases}. \tag{3.6}$$

WKB 近似解は不確定特異点 $(x = \infty)$ と転移点の両者に関して漸近展開になっている. もし, 集合 $\mathcal{D}^{can}$ が有界である場合は 当然第 1 の漸近関係は存在しない.

3.3. §3.1 から, (2.5) の 外部 WKB 近似解 $\tilde{y}^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon)$, また, (2.7) の 内部 WKB 近似解 $\tilde{y}^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon)$ はそれぞれ次のような形を持つ:

$$\tilde{y}^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{a_{j_{\hat{k}}} x^{j_{\hat{k}}}}} \exp\left(\pm \frac{2\sqrt{a_{j_{\hat{k}}}}}{\varepsilon^{h-j_{\hat{k}}/2}} \frac{x^{(m_{j_{\hat{k}}}+2)/2}}{m_{j_{\hat{k}}}+2} \right), \tag{3.7}$$

$$\tilde{y}^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{Q_{j_{\hat{k}+1}}(t)}} \exp\left(\pm \frac{1}{\varepsilon_{j_{\hat{k}+1}}} \int_a^t \sqrt{Q_{j_{\hat{k}+1}}(t)}\, dt \right) \qquad \Bigl(Q_{j_{\hat{k}+1}}(a) = 0\Bigr). \tag{3.8}$$

内部 WKB 近似解 (3.8) は次の性質を持つ:

$$
(3.8)' \qquad \tilde{y}^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{a_{j_{\hat{k}}} t^{j_{\hat{k}}}}} \exp\left(\pm \dfrac{2\sqrt{a_{j_{\hat{k}}}}}{\varepsilon_{j_{\hat{k}+1}}} \dfrac{t^{(m_{j_{\hat{k}}}+2)/2}}{m_{j_{\hat{k}}}+2} \right) & (t \to \infty) \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{a_{j_{\hat{k}+1}} t^{m_{j_{\hat{k}+1}}}}} \exp\left(\pm \dfrac{2\sqrt{a_{j_{\hat{k}+1}}}}{\varepsilon_{j_{\hat{k}+1}}} \dfrac{t^{(m_{j_{\hat{k}+1}}+2)/2}}{m_{j_{\hat{k}+1}}+2} \right) & (t \to 0) \end{cases}
$$

ここで, $j_{\hat{k}} + l_{\hat{k}} = j_{\hat{k}+1}$, $m_{j_{\hat{k}}} - l_{\hat{k}} \cdot \alpha_{j_{\hat{k}}}^{-1} = m_{j_{\hat{k}+1}}$ であることに注意する.
したがって, 定理 3.1 から次の定理を得る:

定理 3.2. $\mathcal{D}^{can}_{out}$ を (2.5) の, $\mathcal{D}^{can}_{in}$ を (2.7) の特性領域とする. この時, (2.5) の真の解 $y^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon)$ と (2.7) の真の解 $y^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon)$ が存在して 次の漸近関係式が成り立つ:

$$
(3.9) \qquad y^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon) \sim \tilde{y}^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon) \ \ \big(\varepsilon \to 0 \ \ (x \in \mathcal{D}^{can}_{out}, \ \ 0 < \varepsilon < 1)\big),
$$

$$
(3.10) \qquad y^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon) \sim \tilde{y}^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon) \ \begin{cases} t \to \infty \ \ (t \in \mathcal{D}^{can}_{in}, \ \ 0 < \varepsilon < 1) \\ \varepsilon \to 0 \ \ (t \in \mathcal{D}^{can}_{in}, \ \ 0 < \varepsilon < 1) \end{cases}.
$$

この定理において, WKB 近似解 $\tilde{y}^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon)$ は 1 つの漸近関係 (3.9) だけを持つことに注意する. それは (定理 3.1 に述べられているように) x-平面上の領域 $\mathcal{D}^{can}_{out}$ が有界であるからである.

§4. matching matrix の形式的な計算.

4.1. 2 つの微分方程式 (2.5) と (2.7) は見かけ上かなり複雑に見える. それらの本質を理解するため, ここでは, 本質を保ちつつ簡単な形に見える微分方程式について考察しよう. そのために, 特性多角形の 1 本の線分の上にある端点を含むすべての点に対応する項をすべて持つ 次の微分方程式

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} \varepsilon^{2h} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = Q(x,\varepsilon)\, y \\ Q(x,\varepsilon) := \displaystyle\sum_{l=0}^{\alpha(M-m)} a_l\, \varepsilon^l\, x^{M - l \cdot \alpha^{-1}} \\ \qquad (a_0 \neq 0, \ a_{\alpha(M-m)} \neq 0; \ h, \alpha, M, m \in \mathbb{N}; \ M > m) \end{cases}
$$

について, その外部解と内部解の関係式である matching matrix を形式的に計算する方法を説明しよう. (1.1) は 特性多角形の各線分上では (4.1) の形をしている. $Q(x,\varepsilon)$ を次のように書き直そう:

$$
(4.1)' \qquad \begin{cases} Q(x,\varepsilon) \ := \displaystyle\sum_{j=M}^{m} \hat{a}_j\, \varepsilon^{\alpha(M-j)}\, x^j \\ \qquad = a x^M + \cdots + a' \varepsilon^{\alpha(M-M')} x^{M'} + \cdots + b' \varepsilon^{\alpha(M-m')} x^{m'} + \cdots + b \varepsilon^{\alpha(M-m)} x^m \\ \qquad (a \neq 0, \ b \neq 0; \ M, M', m', m \in \mathbb{N}; \ M > M' > m' > m) \end{cases}
$$

§2 と同様な単純化を行うことによって 次の 2 つの**優勢** (dominant) 微分方程式を得る. いずれも外部方程式である:

$$
(4.2)_{out,1} \qquad \varepsilon^{2h} \frac{d^2 y}{dx^2} = a\, x^M\, y \quad \big(\varepsilon \to 0, \ \ x : \check{K}\, \varepsilon^{\alpha} \le |x| \ \ (\le \check{k}\, \varepsilon^{\alpha'})\big),
$$

$$
(4.2)_{out,2} \qquad \varepsilon^{2h - \alpha(M-m)} \frac{d^2 y}{dx^2} = b\, x^m\, y \quad \big(\varepsilon \to 0, \ \ x : (\check{K}\, \varepsilon^{\alpha''} \le) \ |x| \le \check{k}\, \varepsilon^{\alpha}\big).
$$

定数 α' と α'' は $\alpha' < \alpha < \alpha''$ を満たし, $\check{K}$ と $\check{k}$ はそれぞれ 十分大きい, 小さい定数である.

拡大変換 $x = t\varepsilon^{\alpha}$ によって (4.1) は

$$(4.3)_{in} \qquad \begin{cases} \varepsilon^{2h-\alpha(M+2)}\dfrac{d^2y}{dt^2} = Q(t)y \quad (\check{k} \le |t| \le \check{K}) \\ Q(t) := at^M + \cdots + a't^{M'} + \cdots + b't^{m'} + \cdots + bt^m \sim \begin{cases} at^M & (t \to \infty) \\ bt^m & (t \to 0) \end{cases} \end{cases}$$

となる. これは内部方程式である. 内部解 (内部方程式の解) と外部解 (外部方程式の解) を接続 (matching) する (§4.4) ためには, $(4.3)_{in}$ の有界な内部領域 $\check{k} \le |t| \le \check{K}$ を **拡大内部領域**

$$(4.3)'_{in} \qquad \mathcal{D}_{in} : \ 0 < |t| < \infty$$

に拡張して, この中に $(4.3)_{in}$ の 特性領域 $\mathcal{D}_{in}^{can}$ を定め, そこで内部解を求めなければならない. 本来の内部領域と外部領域は境界を共有するだけで, 内点を共有しない. 接続するためには, 内点を共有する必要がある (cf. (4.8), (4.15)).

4.2. $(4.3)_{in}$ の係数は多項式であるから 転移点の個数は有限個である. また, Stokes 曲線と anti-Stokes 曲線の本数も有限である. t-平面上の特性領域 (canonical domain) $\mathcal{D}_{in}^{can}$ は非有界単連結集合で, それは写像 $\xi = \xi(a,t)$ $\left(:= \int_a^t \sqrt{Q(t)}\,dt,\ Q(a) = 0\right)$ によって ξ-平面全体に写される. ただし, ξ-平面上で, 転移点の像から出て 虚軸と平行で無限遠点に向かう (一般には, いく本かある) 半直線を除く. この半直線は $\mathcal{D}_{in}^{can}$ の境界の一部分の像である.

無限遠点 $t = \infty$ は M 位の不確定特異点であるから, $M+2$ 本の Stokes 曲線と $M+2$ 本の anti-Stokes 曲線が $t = \infty$ から出る. $t = \infty$ から出る Stokes 曲線は 転移点に向かう. 転移点から出る Stokes 曲線は 他の転移点に向かうか $t = \infty$ に向かうかのどちらかである (§3.2).

或る転移点の ξ-平面上の像から出て実軸と平行な直線の中に それに沿って $t \to \infty$ の時 $\Re\xi$ の値が $+\infty$ に増加するものがある. この半直線の t-平面上における逆像は anti-Stokes (または, 等高線) である. これを $\gamma_{+\infty}$ とする. また, ξ-平面上の他の直線上で $t \to \infty$ の時 $\Re\xi$ の値が $-\infty$ に減少するものがある. この半直線の t-平面上における逆像は anti-Stokes (または, 等高線) である. これを $\gamma_{-\infty}$ とする.

$t = 0$ は $(4.3)_{in}$ の転移点 ((4.1) の準転移点) であり, その位数は m であるから $m+2$ 本の Stokes 曲線と $m+2$ 本の anti-Stokes 曲線が出る. したがって, 或る転移点の ξ-平面上の像から出て実軸と平行な直線の中に それに沿って $t \to 0$ の時 $\Re\xi$ の値が 0 に減少するものがある. この半直線の t-平面上における逆像は anti-Stokes (または, 等高線) である. これを γ_{+0} とする. また, ξ-平面上の他の直線上で $t \to 0$ の時 $\Re\xi$ の値が 0 に増加するものがある. この半直線の t-平面上における逆像は anti-Stokes (または, 等高線) である. これを γ_{-0} とする.

内部領域 $(4.3)'_{in}$ は非有界で $\gamma_{\pm\infty}$ と $\gamma_{\pm 0}$ のような曲線を (何本か) 含む. また, 一般に 特性領域は幾つかあるから, 特にこれら 4 本の曲線を含むものを $\mathcal{D}_{in}^{can}$ として採用することにする.

$\mathcal{D}_{in}^{can}$ と, $(4.2)_{out,1}$ と $(4.2)_{out,2}$ の外部領域とは 共通部分がある. 曲線 $\gamma_{\pm\infty}$ は $(4.2)_{out,1}$ の外部領域に続いている. 曲線 $\gamma_{\pm\infty}$ の両側にある Stokes 曲線の片方の延長線は この外部領域の特性領域 (有界) の境界であり, 外部方程式 $(4.2)_{out,1}$ の Stokes 曲線である. また, 曲線 $\gamma_{\pm 0}$ は $(4.2)_{out,2}$ の外部領域 (これは $x = 0$ に近い方にある) に続いている. 曲線 $\gamma_{\pm 0}$ の両側にある Stokes 曲線 の片方の延長線は外部領域 (有界) の特性領域の境界である. この延長線は 外部方程式 $(4.2)_{out,2}$ の Stokes 曲線である.

4.3. 微分方程式 $(4.2)_{out,j}$, $(4.3)_{in}$ の WKB 解は, 定義 (§3.1) によって, 次の通りである:

$$(4.2)^{WKB}_{out,1} \qquad \tilde{y}^{\pm}_{out,1}(x,\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{a\,x^M}} \exp\left(\pm \frac{\sqrt{a}}{\varepsilon^h}\frac{2}{M+2}x^{(M+2)/2}\right),$$

$$(4.2)^{WKB}_{out,2} \qquad \tilde{y}^{\pm}_{out,2}(x,\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{b\,x^m}} \exp\left(\pm \frac{\sqrt{b}}{\varepsilon^{h-\alpha(M-m)/2}}\frac{2}{m+2}x^{(m+2)/2}\right),$$

$$(4.3)^{WKB}_{in} \qquad \tilde{y}^{\pm}_{in}(t,\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt[4]{Q(t)}} \exp\left(\pm \frac{1}{\varepsilon^{h-\alpha(M+2)/2}} \int_0^t \sqrt{Q(t)}\,dt\right).$$

また, $(4.3)_{in}^{WKB}$ の漸近性は, 容易に分かるように, 次の通りである:

$$(4.4)\qquad \tilde{y}_{in}^{\pm}(t,\varepsilon) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{a\,t^M}}\exp\left(\pm\dfrac{\sqrt{a}}{\varepsilon^{h-\alpha(M+2)/2}}\dfrac{2}{M+2}t^{(M+2)/2}\right) & (t\to\infty) \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{b\,t^m}}\exp\left(\pm\dfrac{\sqrt{b}}{\varepsilon^{h-\alpha(M+2)/2}}\dfrac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\right) & (t\to 0) \end{cases}.$$

ここで, $(4.2)_{out,1}^{WKB}$ の exp 部分の x のべき指数 $(M+2)/2$ と (4.4) の $t\to\infty$ の時の t のべき指数が一致すること, $(4.2)_{out,2}^{WKB}$ の exp 部分の x のべき指数 $(m+2)/2$ と (4.4) の $t\to 0$ の時の t のべき指数が一致すること に注意する.

4.4. 外部 WKB 近似解と内部 WKB 近似解をベクトルの形で次のように表そう:

$$(4.5)_{out,j}\qquad [\tilde{O}_j] := {}^t[\tilde{y}_{out,j}^{+}(x,\varepsilon),\ \tilde{y}_{out,j}^{-}(x,\varepsilon)]\quad (j=1,2),$$

$$(4.5)_{in}\qquad [\tilde{I}] := {}^t[\tilde{y}_{in}^{+}(t,\varepsilon),\ \tilde{y}_{in}^{-}(t,\varepsilon)].$$

次に, 2 組の解 $[\tilde{O}_j]$, $[\tilde{I}]$ を接続する matching matrix

$$(4.6)_j\qquad \tilde{M}_j := M[\tilde{O}_j,\tilde{I}]\quad (j=1,2)$$

を

$$(4.6)'_j\qquad \tilde{M}_j\cdot[\tilde{O}_j]\sim[\tilde{I}]\quad (\varepsilon\to 0).$$

と定義する. まず初めに, $\tilde{M}_1$ を計算しよう. $\tilde{M}_1 := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ と置くと, $(4.6)'_1$ より次が成り立つ:

$$(4.7)\qquad \begin{cases} a\,\dfrac{\tilde{y}_{out,1}^{+}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}_{in}^{+}(t,\varepsilon)} + b\,\dfrac{\tilde{y}_{out,1}^{-}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}_{in}^{+}(t,\varepsilon)} \sim 1 \\ c\,\dfrac{\tilde{y}_{out,1}^{+}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}_{in}^{-}(t,\varepsilon)} + d\,\dfrac{\tilde{y}_{out,1}^{-}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}_{in}^{-}(t,\varepsilon)} \sim 1 \end{cases}\quad (\varepsilon\to 0).$$

2 つの変数 x と t の関係は 拡大変換 $x=t\,\varepsilon^{\alpha}$ であるから

$$(4.8)\qquad x:=\eta\,\varepsilon^{\alpha-\beta},\ \ t:=\eta\,\varepsilon^{-\beta}\ \ (0<\beta<\alpha,\ \ |\eta|=1)$$

と置く事が出来る. すると, x は 外部領域 $\{x:\ \check{K}\,\varepsilon^{\alpha}\le|x|\}$ に, t は拡大内部領域の $\mathcal{D}_{in}^{can}$ に属し, $\varepsilon\to 0$ の時 $x\to 0$ かつ $t\to\infty$ となる. WKB 近似解の x と t に (4.8) を代入すると

$$(4.9)\qquad \begin{cases} \tilde{y}_{out,1}^{\pm}(x,\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a\,(\eta\varepsilon^{\alpha-\beta})^M}}\exp\left(\pm\dfrac{2\sqrt{a}}{M+2}\eta^{(M+2)/2}\varepsilon^{-\hat{g}}\right) \\ \tilde{y}_{in}^{\pm}(t,\varepsilon) \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{a\,(\eta\varepsilon^{-\beta})^M}}\exp\left(\pm\dfrac{2\sqrt{a}}{M+2}\eta^{(M+2)/2}\varepsilon^{-\hat{g}}\right)\ (t\to\infty) \end{cases}$$

であるから,

$$(4.10)_1\qquad \frac{\tilde{y}_{out,1}^{+}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}_{in}^{+}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha M/4}\exp(0)$$

が成り立つ. また, (4.9) の exp 部分の ε のべき指数 $\hat{g}:=h-(\alpha-\beta)(M+2)/2$ が正であることから, $\varepsilon\to 0$ の時

$$(4.10)_2\qquad \frac{\tilde{y}_{out,1}^{-}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}_{in}^{+}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha M/4}\exp\left(-\frac{4\sqrt{a}}{M+2}\eta^{(M+2)/2}\varepsilon^{-\hat{g}}\right)\to\infty\quad (\Re\eta<0)$$

が成り立つ．ただし，新しいパラメーター η は，$(4.3)_{in}$ の特性領域 $\mathcal{D}_{in}^{can}$ において，十分大きな $|t|$ に対して $\arg\eta = \arg\gamma_{-\infty}$ であるように選ぶ (cf. §4.2.)．言い換えれば，anti-Stokes 曲線 $\gamma_{-\infty}$ ($\in \mathcal{D}_{in}^{can}$) に沿って $t\to\infty$ となるようにするのである．同様にして 次が成り立つ：

$$(4.10)_3 \qquad \frac{\tilde{y}^{+}_{out,1}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{-}_{in}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha M/4}\exp\left(\frac{4\sqrt{a}}{M+2}\eta^{(M+2)/2}\varepsilon^{-\hat{\beta}}\right) \to \infty \quad (\Re\eta > 0).$$

ただし，ここの η は上のものとは違って，特性領域 $\mathcal{D}_{in}^{can}$ に属する十分大きな $|t|$ に対して $\arg\eta = \arg\gamma_{+\infty}$ ととる．言い換えれば，anti-Stokes 曲線 $\gamma_{+\infty}$ ($\in \mathcal{D}_{in}^{can}$) に沿って $t\to\infty$ とするのである．また，

$$(4.10)_4 \qquad \frac{\tilde{y}^{-}_{out,1}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{-}_{in}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha M/4}\exp(0)$$

であるから，(4.7) は

$$(4.11) \qquad \begin{cases} a\cdot\varepsilon^{-\alpha M/4} + b\cdot\infty & \sim 1 \\ c\cdot\infty + d\cdot\varepsilon^{-\alpha M/4} & \sim 1 \end{cases}$$

となり，したがって

$$(4.11)' \qquad a\sim\varepsilon^{\alpha M/4},\ \ b\sim 0,\ \ c\sim 0,\ \ d\sim\varepsilon^{\alpha M/4}\ \ (\varepsilon\to 0)$$

が成り立ち，これから

$$(4.12) \qquad \tilde{M}_1 = \varepsilon^{\alpha M/4}E$$

を得る．ここで，E は 単位行列である．

4.5. もう一つの matching matrix

$$\check{M} := M[\tilde{I},\ \tilde{O}_2]$$

を計算しよう．この行列 $\check{M}$ は $[\tilde{I}]$ と $[\tilde{O}_2]$ を接続するもので

$$(4.13) \qquad \check{M}\cdot[\tilde{I}] \sim [\tilde{O}_2] \quad (\varepsilon\to 0)$$

なる関係を満たす行列である．関係式 (4.13) を

$$(4.13)' \qquad \check{M}^{-1}\cdot[\tilde{O}_2] \sim [\tilde{I}] \quad (\varepsilon\to 0),$$

と書き直すと

$$\check{M}^{-1} = \tilde{M}_2$$

であるから $\tilde{M}_1$ を計算する方法とまったく同じ方法で $\check{M}^{-1}$ を求めることができる．再び $\check{M}^{-1} := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と置くことにする．したがって，(4.7) と同じ形をした次の関係式が成り立つ：

$$(4.14) \qquad \begin{cases} a\,\dfrac{\tilde{y}^{+}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{+}_{in}(t,\varepsilon)} + b\,\dfrac{\tilde{y}^{-}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{+}_{in}(t,\varepsilon)} \sim 1 \\[2ex] c\,\dfrac{\tilde{y}^{+}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{-}_{in}(t,\varepsilon)} + d\,\dfrac{\tilde{y}^{-}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{-}_{in}(t,\varepsilon)} \sim 1 \end{cases} \quad (\varepsilon\to 0).$$

2つの変数 x と t は $x = t\varepsilon^{\alpha}$ なる関係 (拡大変換) がある．今度は，前と違って

$$(4.15) \qquad x := \eta\,\varepsilon^{\alpha+\beta},\ \ t := \eta\,\varepsilon^{\beta} \quad (\alpha > \beta > 0,\ |\eta| = 1)$$

と分ける．すると，容易に分かるように x が ($x=0$ に近い方の) 外部領域 $\{x:\ |x| \le \check{k}\,\varepsilon^{\alpha}\}$ に，t は拡大内部領域の $\mathcal{D}_{in}^{can}$ に属し，$\varepsilon\to 0$ の時 $x\to 0$ となり，また $t\to 0$ である．WKB 近似解の

x, t に (4.15) を代入すると

$$\text{(4.16)} \quad \begin{cases} \tilde{y}^{\pm}_{out,2}(x,\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{b\,(\eta\varepsilon^{\alpha+\beta})^m}} \exp\left(\pm \dfrac{2\sqrt{b}}{m+2} \eta^{(m+2)/2} \varepsilon^{-\check{g}} \right) \\ \tilde{y}^{\pm}_{in}(t,\varepsilon) \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{b\,(\eta\varepsilon^{\beta})^m}} \exp\left(\pm \dfrac{2\sqrt{b}}{m+2} \eta^{(m+2)/2} \varepsilon^{-\check{g}} \right) \quad (t \to 0) \end{cases}$$

であるから,

$$\text{(4.17)}_1 \quad \frac{\tilde{y}^{+}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{+}_{in}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha m/4} \exp(0)$$

が成り立つ. また, (4.16) の exp 部分の ε のべき指数 $\check{g} := h - \alpha(M+2)/2 - \beta(m+2)/2$ が正であることから, $\varepsilon \to 0$ の時 次の関係式が成り立つ：

$$\text{(4.17)}_2 \quad \frac{\tilde{y}^{-}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{+}_{in}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha m/4} \exp\left(-\frac{4\sqrt{b}}{m+2} \eta^{(m+2)/2} \varepsilon^{-\check{g}} \right) \to \infty \quad (\Re\eta < 0).$$

ただし, 新しいパラメーター η は, 特性領域 $\mathcal{D}^{can}_{in}$ に属する十分小さい $|t|$ に対して $\arg\eta = \arg\gamma_{-0}$ であるように, 即ち, t が anti-Stokes 曲線 γ_{-0} $(\in \mathcal{D}^{can}_{in})$ に沿って $t=0$ に近ずくように, 選ぶのである. 同様にして次が成り立つことが分かる：

$$\text{(4.17)}_3 \quad \frac{\tilde{y}^{+}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{-}_{in}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha m/4} \exp\left(\frac{4\sqrt{b}}{m+2} \eta^{(m+2)/2} \varepsilon^{-\check{g}} \right) \to \infty \quad (\Re\eta > 0 \ \ \varepsilon \to 0).$$

ただし, ここのパラメーター η は, 特性領域 $\mathcal{D}^{can}_{in}$ に属する十分小さな $|t|$ に対して $\arg\eta = \arg\gamma_{+0}$ であるように, 即ち, anti-Stokes 曲線 γ_{+0} $(\in \mathcal{D}^{can}_{in})$ に沿って $t \to 0$ となるように, 選ぶのである. また,

$$\text{(4.17)}_4 \quad \frac{\tilde{y}^{-}_{out,2}(x,\varepsilon)}{\tilde{y}^{-}_{in}(t,\varepsilon)} = \varepsilon^{-\alpha m/4} \exp(0)$$

であるから, (4.14) は

$$\text{(4.18)} \quad \begin{cases} a \cdot \varepsilon^{-\alpha m/4} + b \cdot \infty & \sim 1 \\ c \cdot \infty + d \cdot \varepsilon^{-\alpha m/4} & \sim 1 \end{cases}$$

となり, したがって,

$$\text{(4.18)}' \quad a \sim \varepsilon^{\alpha m/4}, \ \ b \sim 0, \ \ c \sim 0, \ \ d \sim \varepsilon^{\alpha m/4} \ \ (\varepsilon \to 0)$$

が成り立つことから

$$\text{(4.19)} \quad \check{M}^{-1} = \varepsilon^{\alpha m/4} E$$

と

$$\text{(4.20)} \quad \check{M} = \varepsilon^{-\alpha m/4} E$$

が得られる. 以上をまとめて, 次の定理を得る：

定 理 4.1. $\mathcal{D}^{can}_{in}$ を $(4.3)_{in}$ の特性領域であるとする. 3つの解 $(4.5)_{out,j}$, $(4.5)_{in}$ は $(4.6)_j$, (4.13) によって定義される 次の matching matrix によって 関係付けられる：

$$\text{(4.21)} \quad \tilde{M}_1 = \varepsilon^{\alpha M/4} E, \quad \tilde{M}_2 = \varepsilon^{\alpha m/4} E, \quad \check{M} = \varepsilon^{-\alpha m/4} E.$$

注 意. 関係式 $\tilde{M}_2 = \check{M}^{-1}$ が成り立つことに注意する. 上の matching matrix は 拡大変換 (stretching transformation) の ε のべき指数の値 (α) と $Q(x,\varepsilon)$ の最初と最後の項の x のべき指数の値 $(M,\ m)$ によって与えられる. 最初の項と最後の項は特性多角形 (の1つ) の線分の端点に対応する項である (cf. Nakano [22] の §7).

§5. 方程式 (1.1) の matching matrix.

5.1. 単純化された微分方程式 (2.5) と (2.7) は1つの方程式 (1.1) から漸近的に導かれたものであるから, それらの解の間には線形関係がある. その線形関係は §4 で示されたように matching matrix で表される.

$y^{\pm}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon)$ を (2.5) の真の解, $y^{\pm}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon)$ を (2.7) の真の解とする. それらに対応する WKB 近似解は それぞれ (3.7) および (3.8) である. ベクトルの形の解を

$$[O_{j_{\hat{k}}}] := {}^t[y^{+}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon),\ \ y^{-}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon)],$$
$$[I_{j_{\hat{k}+1}}] := {}^t[y^{+}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon),\ \ y^{-}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon)]$$

と置くと, 次の matching matrix を得る:

定 理 5.1. 解 $[O_{j_{\hat{k}}}]$ を解 $[I_{j_{\hat{k}+1}}]$ に接続する matching matrix $M[O_{j_{\hat{k}}},I_{j_{\hat{k}+1}}]$ は 2×2 行列であり 次式で 定義されるものとする：

$$M[O_{j_{\hat{k}}},I_{j_{\hat{k}+1}}]\,[O_{j_{\hat{k}}}] = [I_{j_{\hat{k}+1}}]. \tag{5.1}$$

この時, この matching matrix は次式で与えられる:

$$M[O_{j_{\hat{k}}},I_{j_{\hat{k}+1}}] \sim \varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}} m_{j_{\hat{k}}}/4}E \quad (\varepsilon\to 0). \tag{5.2}$$

また, もう1つの matching matrix $M[I_{j_{\hat{k}+1}},O_{j_{\hat{k}+1}}]\,[I_{j_{\hat{k}+1}}] = [O_{j_{\hat{k}+1}}]$ は

$$M[I_{j_{\hat{k}+1}},O_{j_{\hat{k}+1}}] \sim \varepsilon^{-\alpha_{j_{\hat{k}}} m_{j_{\hat{k}+1}}/4}E \quad (\varepsilon\to 0) \tag{5.2'}$$

である.

証 明. (5.1) の真の解に, それらに対応する WKB 近似解を代入すると, 漸近関係式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{y}^{+}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon) \\ \tilde{y}^{-}_{out,j_{\hat{k}}}(x,\varepsilon) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \tilde{y}^{+}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon) \\ \tilde{y}^{-}_{in,j_{\hat{k}+1}}(t,\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (\varepsilon\to 0) \tag{5.3}$$

が成り立つ. ここで,

$$M[O_{j_{\hat{k}}},I_{j_{\hat{k}+1}}] := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

と置いた. (5.3) を簡単に

$$\tilde{M}\cdot[\tilde{O}_{j_{\hat{k}}}] \sim [\tilde{I}_{j_{\hat{k}+1}}] \quad (\varepsilon\to 0) \tag{5.4}$$

と表そう. ところで, (2.7) の係数は

$$Q_{j_{\hat{k}+1}}(t) = a_{j_{\hat{k}}}\,y^{m_{j_{\hat{k}}}} + \cdots + a_{j_{\hat{k}+1}}\,y^{m_{j_{\hat{k}+1}}} \tag{5.5}$$

であり, x と t の関係は 拡大変換 $x = t\varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}}}$ (cf. (2.6)) である. そこで, 各定数 $a_{j_{\hat{k}}}, m_{j_{\hat{k}}}, a_{j_{\hat{k}+1}}$, $m_{j_{\hat{k}+1}}$ を (4.1) における定数 a, M, b, m に対応させ, また, $\alpha_{j_{\hat{k}}}$ を 拡大変換のベキ指数 α (cf. §4.1) に対応させることによって, 次式を得る：

$$\tilde{M} = \varepsilon^{\alpha_{j_{\hat{k}}} m_{j_{\hat{k}}}/4}E. \tag{5.6}$$

全く同様にして, もう一つの matching matrix

$$\check{M} \sim \varepsilon^{-\alpha_{j_{\hat{k}}} m_{j_{\hat{k}+1}}/4}E \quad (\varepsilon\to 0) \tag{5.7}$$

を得る. ただし, $\check{M}$ は

$$\check{M}\cdot[I_{j_{\hat{k}+1}}] = [O_{j_{\hat{k}+1}}] \tag{5.7'}$$

で定義されるものである. Q.E.D.

参考文献

[1] Aoki, T., T. Kawai, and Y. Takei, On the exact steepest descent method - a new method for the description of Stokes curves. J. Math. Phys. **42** (2001), 3691-3713.

[2] Berk, H. L., W. M. Nevins and K.V. Roberts, New Stokes line in WKB theory. J. Math. Phys. **23** (1982), 988-1002.

[3] Delabaere, E. and T. D. Tai, Spectral analysis of complex cubic oscillator, Univ. Nice-Sophia Antipolis. Prépubl. n° **555** (1999).

[4] Evgrafov, M. A. and M. V. Fedoryuk, Asymptotic behavior as $\lambda \to \infty$ of solutions of the equation $w''(z) - p(z,\lambda)w(z) = 0$ in the complex z-plane. Uspehi Mat. Nauk **21**, or Russian Math. Surveys **21** (1966), 1-48.

[5] Fedoryuk, M. V., The topology of Stokes lines for equations of the second order. A.M.S. Transl. (2) **89** (1970), 89-102. or Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **29** (1965), 645-656.

[6] ——, *Asymptotic Analysis.* Springer Verlag (1993).
(English translation of "Федорюк, М.В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука (1983).")

[7] ——, *The encyclopedia of mathematical science.***13**, Analysis I. Springer Verlag (1993).

[8] Fujiié, S. and T. Ramond, Matrice de scattering et resonances associées à une orbite hérocline. Ann. Inst. Henri poincaré. **69** (1998), 31-81.

[9] Fröman, N. and P. O. Fröman, *JWKB approxiamtion, Contributions to the theory.* North-Holland (1965).

[10] Heading, J., *An introduction to phase integral methods.* Wiley (1962).

[11] Hukuhara, M., Sur les points singulieres des équaions différentielles linéaires III. Mém. Fac. Sci. Kyushu. Univ. **2** (1941), 125-137.

[12] Iwano, M. and Y. Sibuya, Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter. Kodai Math. Sem. Rep. **15** (1963), 1-28.

[13] Kelly, B. J., Admissible domains for higher order differential equations. Studies in Appl. Math. **60** (1979), 211-240.

[14] Matsubara, K., M. Nakano and T. Nishimoto, On the complex WKB theory for the BNR equation on the complex plane. J. Math. Phys. (in press).

[15] Nakano, M., On asymptotic solutions of a second order linear ordinary differential equation with a turning point I, II. Bull. of Hiyoshi. **14** (1972), 70-75. **15** (1973), 64-70.

[16] ——, Second order linear ordinary differential equations with turning points and singularities I, II. Kodai Math. Sem. Rep. **29** (1977), 88-102. Kodai Math. J. **1** (1978), 304-312.

[17] ——, On products of the Airy functions and the WKB method. J. Tech. Univ. Plovdiv (1995), 27-38.

[18] ——, On a n-th order linear ordinary differential equation with a turning-singular point. Tokyo J. Math. **21** (1998), 201-215.

[19] ——, The WKB analysis for 3rd order O.D.E. Proc. Third Internationl Conf. St. Petersburg (2000).

[20] ——, On the complex WKB method for a secondary turning point problem. Tokyo J. Math. **24** (2001), 343-358.

[21] ——, On the complex WKB analysis for a Schrödinger equation with a general three-segment characteristic polygon. Vietnam J. Math. **30** SI (2002), 605-625.

[22] ——, On the complex WKB analysis for a second order linear O.D.E. with a many-segment characteristic polygon. Tokyo J. Math. **27** (2004), 411-442.

[23] —— and T. Nishimoto, On a secondary turning point problem. Kodai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 355-384.

[24] ——, M. Namiki, and T. Nishimoto, On the WKB method for certain third order ordinary differential equation. Kodai Math. J. **14** (1991) 432-462.

[25] Nishimoto, T., On matching method for a linear ordinary differential equation containing a parameter I, II, III. Kodai Math. Sem. Rep. **17** (1965), 307-328; **18** (1966), 61-86; **19** (1967), 80-94.

[26] Olver, F. W. J., *Asymptotics and special functions.* Academic Press (1974).

[27] Paris, R. B. and A. D. Wood, *Asymptotics of high order differential equations.* Longman Scientific and Technical (1986).

[28] Roos, H. G., Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweisegmentigem charakteristischem Polygon. Beitr. Anal. **7** (1975), 55-63.

[29] ——, Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung mit dreisegmentigem charakteristischen Polygon. Math. Nachr. **88** (1979), 93-103.

[30] Uchiyama, K., How to draw Stokes curves for 2nd order differential equations (Computer program revised by M. Nakano).

[31] Wasow, W., Turning point problems for systems of linear differential equations, I. The formal theory, II. The analytic theory. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 657-673. **15** (1962), 173-187.

[32] ——, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations.* John Wiley and Sons (Interscience) (1965).

[33] ——, *Linear turning point theory.* Springer-Verlag (1985).